Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Def Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto

Diremo che $f(x)$ è derivabile su A se essa è derivabile in ogni punto di A

Prop

Se $f(x)$ è derivabile in $x_0 \implies f(x)$ è continua in x_0

Dim

(Ip)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

(Tesi)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

Infatti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{(Ip) \to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} = 0$$

Non vale il viceversa.

Esempio $f(x) = |x|$

(1) In $x_0 = 0$ è continua

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = |0| = f(0)$$

Ok

(2) In $x_0 = 0$ $f(x)$ invece non è derivabile

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1 \end{cases}$$

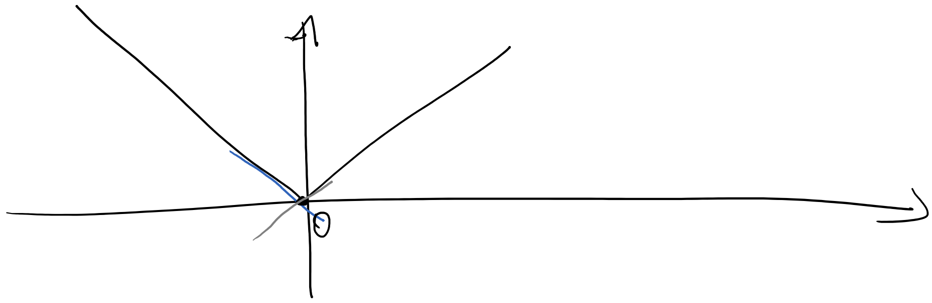
$$\implies \nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \implies f(x) = |x| \text{ non è derivabile in } x_0 = 0$$

$\{ x$ se $x \geq 0$

derivabile in $x_0 = 0$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

graficamente



In $x_0 = 0$ non c'è un'unica retta tangente in $(0,0)$ al grafico della funzione $f(x) = |x|$

Teorema (Fermat)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in]a,b[$

se x_0 è estremo relativo $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$

Dim Supponiamo che x_0 sia max rel, ossia

$\exists \delta > 0 : \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

ossia $\quad \boxed{f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[}$

Quindi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{matrix} \ominus \\ \ominus \end{matrix} \geq 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{matrix} \ominus \\ \oplus \end{matrix} \leq 0 \end{cases}$$

se $x \to x_0^- \Rightarrow x < x_0$ ossia $x - x_0 < 0$

$x \to x_0^+ \Rightarrow x > x_0$ ossia $x - x_0 > 0$

Osserviamo che $f'(x_0)$ deve essere contemporaneamente ≥ 0 e ≤ 0 $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$ ∎

Teorema (Rolle)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$

tale che $f(a)=f(b)$

$$\Longrightarrow \exists\, c\in\,]a,b[\ :\ f'(c)=0$$

Teorema (Cauchy)

Siano $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili su $]a,b[$

con $g'(x)\neq 0\ \ \forall x\in\,]a,b[$

Allora $\exists\, c\in\,]a,b[$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Caso particolare : $g(x)=x$ $\quad(g'(x)=1\neq 0)$

Teorema (Lagrange)

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$

Allora $\exists\, c\in\,]a,b[$:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)}$$

Conseguenze di Lagrange:

1. Se $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivabile tale che $\boxed{f'(x)=0\quad\forall x\in\,]a,b[}\Longrightarrow f(x)=\text{costante}$

Infatti, dire che $f(x)$ è costante significa che

$\forall\, x_1,x_2\in\,]a,b[\ \Longrightarrow f(x_1)=f(x_2)$ (Tesi)

Considero $f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ e noto che sono soddisfatte le ipotesi di Lagrange

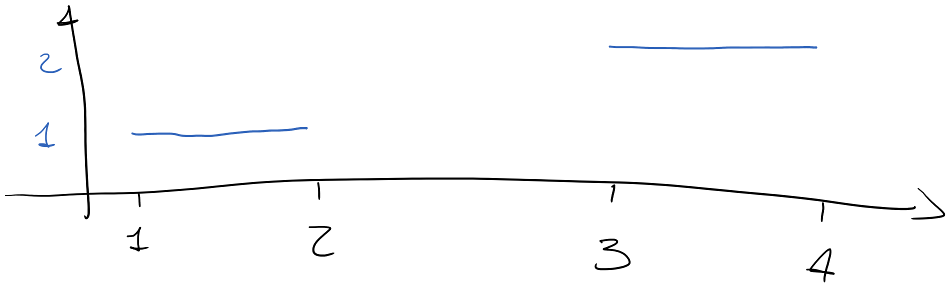
$$\Longrightarrow \exists\, c \in\,]x_1, x_2[\ : \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \iff f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$\iff f(x_2) = f(x_1) \qquad \text{Tesi}$$

Osserviamo che questa conseguenza 1 vale solo se $f(x)$ è definita in un intervallo

Esempio



$f : [1,2] \cup [3,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [1,2] \\ 2 & \text{se } x \in [3,4] \end{cases}$

In tal caso $f'(x) = 0 \quad \forall x \in\,]1,2[\cup]3,4[$
ma $f(x)$ non è costante

Conseguenza 2

Teorema (Monotonia attraverso la derivata) (Importante)

Sia $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su $]a,b[$ -

Allora

1. $f(x)$ monotona crescente $\iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in\,]a,b[$

2. $f(x)$ monotona decrescente $\iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in\,]a,b[$

Dim ② $(\Longrightarrow)$ (Ip) $f(x)$ è decrescente

ossia $\boxed{x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)}$

(Tesi) $\boxed{\forall x_0 \in]a,b[\quad f'(x_0) \leq 0}$

Infatti:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \leq 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \leq 0 \end{cases}$$

Se $x \to x_0^- \Rightarrow x < x_0 \Rightarrow \boxed{x - x_0 < 0}$

$\xrightarrow{(Ip)} f(x) > f(x_0) \Rightarrow \boxed{f(x) - f(x_0) > 0}$

Se $x \to x_0^+ \Rightarrow x > x_0 \Rightarrow \boxed{x - x_0 > 0}$

$\xrightarrow{(Ip)} f(x) < f(x_0) \Rightarrow \boxed{f(x) - f(x_0) < 0}$

$(\Longleftarrow)$ (Ip) $\boxed{f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[}$

(Tesi) $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$ con

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Infatti, utilizziamo Lagrange per la funzione

$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$

le ipotesi di Lagrange sono verificate (poiché abbiamo derivabilità in un intervallo più grande)

$\exists\, c \in]x_1, x_2[\; : \quad f(x_2) - f(x_1) \quad f'(c)$ [illegible]

$\exists\, c \in]x_1, x_2[\;:\quad \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \leq 0 \;(hp)$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$

ossia numeratore e denominatore devono avere segni discordi. Ma, $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

$$\Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) < 0$$

$$\Longrightarrow \quad f(x_2) < f(x_1) \qquad \text{Tesi}$$

■

Corollario

Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile e sia $x_0 \in]a,b[$

se $\exists\, \delta > 0$:

① se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$

$\Longrightarrow$ x_0 è max rel

② se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$

$\Longrightarrow$ x_0 è min rel

Vediamo un'applicazione del teorema di derivazione di funzioni inverse

① $f(x) = \sin x \; : \; [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

Noto che $f'(x) = \cos x$

ma $\cos x > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\implies f(x) = \operatorname{sen} x$

è crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\implies f(x) = \operatorname{sen} x$ è iniettiva in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Infatti, $x_1, x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad x_1 \neq x_2$

$\implies$ uno è più piccolo dell'altro ($\mathbb{R}$ è tot ordinato)

Supponiamo $x_1 < x_2 \implies \operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2$

In particolare $\operatorname{sen} x_1 \neq \operatorname{sen} x_2$ (ossia iniettiva)

Inoltre, poiché $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$\implies \inf_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \operatorname{sen} x = -1 \quad e \quad \sup_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \operatorname{sen} x = 1$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ è continua, Dal teorema di Darboux

$\implies \operatorname{Im} \operatorname{sen} x = [-1, 1]$ (Immagine della funzione)

$\implies f(x) = \operatorname{sen} x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

è una funzione iniettiva + suriettiva

$\implies f(x) = \operatorname{sen} x$ è invertibile su $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Def Definiamo la funzione inversa di $\operatorname{sen} x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

Come $\arcsin y : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Analogamente, se consideriamo

$$f(x) = \cos x \ : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

si prova che $f(x)$ è anch'essa invertibile

e Definiamo la sua funzione inversa come

$$\arccos y \ : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

Infine sia

$$f(x) = \tan x \ : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

e osservo

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\overset{\to -1}{\operatorname{sen} x}}{\underset{\to 0^+}{\cos x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\overset{\to 1}{\operatorname{sen} x}}{\underset{\to 0^+}{\cos x}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \inf_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \tan x = -\infty \qquad \sup_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \tan x = +\infty$$

essendo $\tan x$ continua. il teorema di Darboux

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} \tan x =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad f(x) = \tan x : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva

Inoltre, poiché $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = \tan x$ è crescente $\Rightarrow$ $f(x)$ è iniettiva

Concludo $f(x) = \tan x : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ è invertibile

e definiamo la sua funzione inversa come

$$\arctan y : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Ricordo

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \boxed{y_0 = f(x_0)}}$$

Quindi

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \qquad y = \tan x$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 x} =$$

$$= \frac{1}{1 + y^2}$$

Ossia

$$\boxed{f(y) = \arctan y \implies f'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$$

Esercizio

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x^2 - 1} = \left(\frac{\log 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ F.i.} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\log(1 + (x-1))}{(x-1)\,(x+1)} =$$

Chiamo $z = x - 1$

$$\lim_{x \to 1} z = 0$$

$$= \lim_{z \to 0} \underbrace{\frac{\log(1+z)}{z}}_{\to 1} \cdot \lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Esercizio $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \log x = (0 \cdot (-\infty) \text{ f.i.})$

$$= \lim_{x \to 0^+} x \cdot \left(-\log \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} - \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Chiamo $z = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} z = +\infty$

$$= - \lim_{z \to +\infty} \frac{\log z}{z} = 0$$

Esercizio $\lim_{x \to 2^+} (x-2)^{\log(x-1)} = \left((2-2)^{\log 1} = 0^0 \text{ f.i.} \right)$

Richiamo: se $a \in \mathbb{R}^+$ $\boxed{a = e^{\log a}}$

$$\Rightarrow (x-2)^{\log(x-1)} = e^{\log\left[(x-2)^{\log(x-1)}\right]} =$$

$$= e^{\log(x-1) \cdot \log(x-2)} =$$

se sostituisco $x=2 \rightarrow e^{\log(2-1) \cdot \log(2-2)} = e^{0 \cdot (-\infty)}$

Non procedere ora

In tal caso bisogna utilizzare il teorema di Cauchy!

<u>Esercizio</u> $A = \left\{ \dfrac{n + (-1)^n \cdot n + 5}{n^2+1} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Considero $A = A_p \cup A_d$

con $A_p = \left\{ \dfrac{n+n+5}{n^2+1} \; : \; n \in \mathbb{N} \text{ pari} \right\} = \left\{ \dfrac{2n+5}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$A_d = \left\{ \dfrac{n-n+5}{n^2+1} \; : \; n \in \mathbb{N} \text{ dispari} \right\} = \left\{ \dfrac{5}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Studio maggioranti per A_p essendo $\dfrac{2n+5}{n^2+1} > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Considero $x>0$ maggiorante per A_p

$$\frac{2n+5}{n^2+1} \leq x \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ pari}$$

$$2n+5 \leq xn^2 + x$$

$$-xn^2 + 2n + (5-x) \leq 0$$

(P_n) $\boxed{xn^2 - 2n - (5-x) \geq 0}$

Impongo le sol $= \mathbb{N}_p$

se $\Delta > 0 \iff \Delta = 4 + 4x(5-x) > 0$

Se $\Delta > 0 \iff \Delta = 4 + 4x(5-x) > 0$

Sol $\cancel{n \le \frac{2-\sqrt{\Delta}}{2x}} \cup \boxed{n \ge \frac{2+\sqrt{\Delta}}{2x}}$

NO

Imponendo che $Sol = \mathbb{N}_p$

$\Longrightarrow \quad n \ge \frac{2+\sqrt{\Delta}}{2x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ pari

ossia $\quad 0 \ge \frac{2+\sqrt{\Delta}}{2x}$ mai

Quindi $\Delta \le 0$ $\quad Sol = \mathbb{N}_{pari}$ ok

Ossia $\quad 4 + 4x(5-x) \le 0 \qquad (x>0)$

$1 + x(5-x) \le 0$

$-x^2 + 5x + 1 \le 0$

$x^2 - 5x - 1 \ge 0 \qquad \Delta = 25 + 4 = 29$

NO $(x>0)$

Sol $\quad \cancel{x \le \frac{5-\sqrt{29}}{2}} \cup x \ge \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

Ossia $\quad A_p^* = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \ge \frac{5+\sqrt{29}}{2} \right\}$

$\Longrightarrow \quad \sup A_p = \min A_p^* = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

Domanda $\quad \frac{5+\sqrt{29}}{2} \in A_p$?

Cerco maggioranti per $A_d = \left\{ \frac{5}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \text{ dispari} \right\}$

$\bar{x} > 0$ è maggiorante per A_d se

$$\frac{5}{n^2+1} \le x \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

$$\frac{n^2+1}{5} \ge \frac{1}{x}$$

$$n^2+1 \ge \frac{5}{x}$$

$$(P_n) \qquad \boxed{n^2 + \left(1 - \frac{5}{x}\right) \ge 0} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ disp}$$

$$\Delta = 0^2 - 4\left(1 - \frac{5}{x}\right)$$

Affinché $Sol = \mathbb{N}$ dispari deve accadere

$\Delta \le 0$

$$4\left(1 - \frac{5}{x}\right) \ge 0$$

$$4 - \frac{20}{x} \ge 0$$

$$\frac{20}{x} - 4 \le 0 \iff \frac{20}{x} \le 4$$

$$\frac{x}{20} \ge \frac{1}{4}$$

Sol $\qquad x \ge \frac{20}{4} = 5$

$$\Longrightarrow \qquad A_d^* = \{ x \in \mathbb{R} : x \ge 5 \}$$

$\Rightarrow \sup A_d = \min A_d^* = 5$

Domanda $5 \in A_d$?

Concludo $\boxed{\sup A = \max\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}, 5\right) = \frac{5+\sqrt{29}}{2}}$

Analogamente

$$\boxed{\inf A = \min\left(\inf A_p, \inf A_d\right)}$$